Dispense

FILIPPO LA IACONA

DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

Revisionato il 30/08/2021

INDICE

DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

Si tratta di tutte quelle disequazioni in cui l'incognita *x* compare come argomento di una o più funzioni trigonometriche (sin, cos, tan e cot).

Disequazioni trigonometriche elementari

Sono disequazioni del tipo: $\cos x < a$; $\sin x > b$; $\tan x \geq c$, ecc, con *a*, *b* e *c* numeri.

Esempio

$$\sin x > \frac{1}{2} \tag{1}$$

Innanzi tutto bisogna trovare i valori per cui $\sin x = \frac{1}{2}$. Come si è visto nel capitolo delle equazioni trigonometriche (vedi), si avrà la situazione seguente:

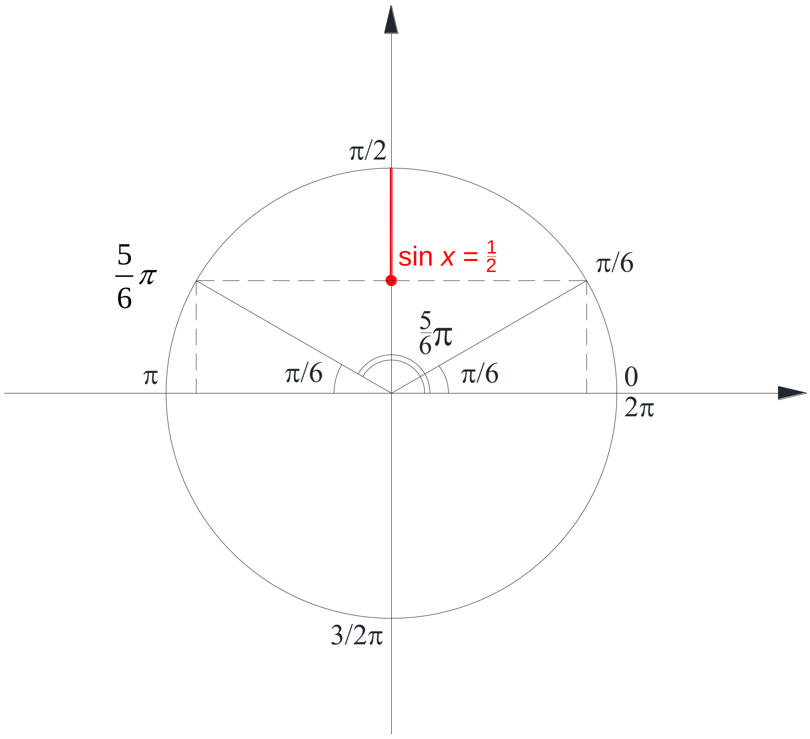
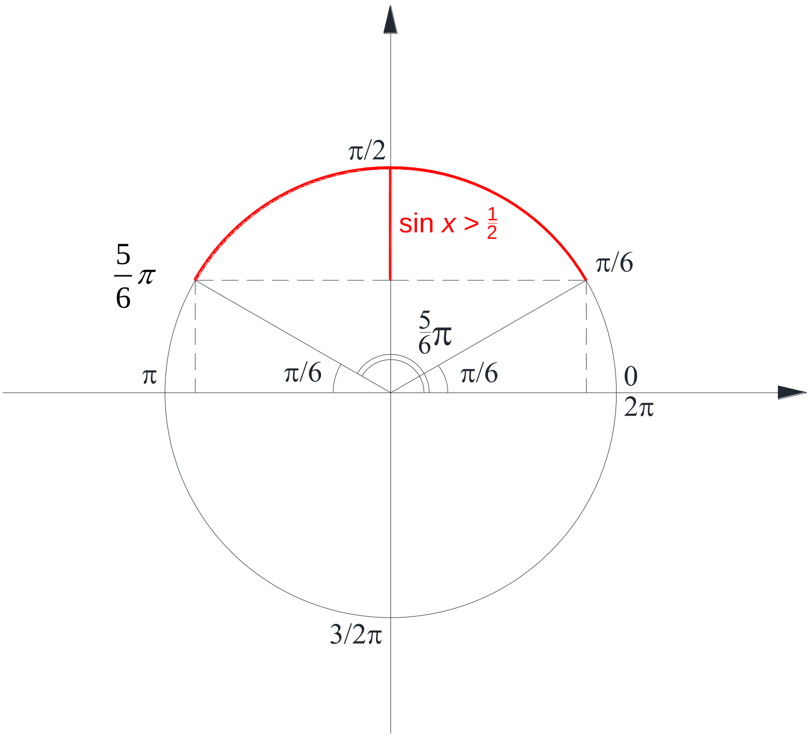


Figura 1

$$S_{eq} \equiv \left\{ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\}$$

Come si vede in figura i valori di x per cui è soddisfatta la disequazione data, ossia la (1), sono rappresentati da tutti quegli angoli per cui i valori del seno ricadono nell'intervallo segnato in rosso in figura. L'insieme delle soluzioni sarà allora il seguente:

$$S \equiv \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\}$$



<u>Disequazioni in una sola funzione trigonometrica</u>

Sono disequazioni trigonometriche in cui compare una sola funzione trigonometrica della stessa funzione di x, ovvero dello stesso angolo. Tali disequazioni, tramite un cambio di variabile, si possono risolvere come disequazioni algebriche polinomiali (disequazioni di secondo, terzo, quarto grado). In questo modo, saranno poi **riconducibili a disequazioni trigonometriche elementari**.

Esempio

$$2\sin^2 x + 1 > 3\sin x$$

Portando tutto al primo membro si ottiene:

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 > 0$$

Come si vede, si tratta di una disequazione di secondo grado in $\sin x$. Per una risoluzione più agevole risulta utile effettuare il seguente cambio di variabile:

$$y = \sin x \tag{2}$$

L'equazione data diventa così:

$$2y^2 - 3y + 1 > 0 \tag{3}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado associata si ottiene:

$\Delta = 1 > 0$

$y = \frac{1}{2}; \qquad y = 1$

La disequazione (3) è dunque soddisfatta per i seguenti valori di *y*:

$$y < \frac{1}{2} \vee y > 1$$

Per la posizione (2) si avrà dunque:

$$\sin x < \frac{1}{2} \vee \sin x > 1$$

dove la soluzione $\sin x > 1$ andrà scartata poiché, come si è detto, le funzioni *sin* e *cos* hanno valori che sono compresi nell'intervallo $[-1;\ 1]$. Si dovrà, allora, solo risolvere la seguente disequazione trigonometrica elementare:

$$\sin x < \frac{1}{2} \tag{4}$$

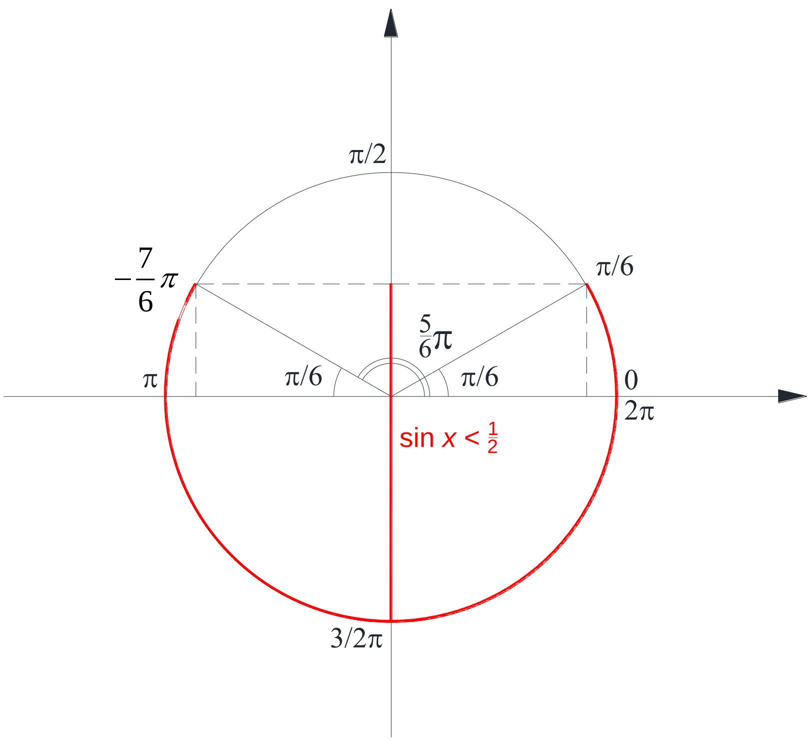
Dovendo prima risolvere l'equazione $\sin x = \frac{1}{2}$, si è visto come, per essa, si abbia la situazione illustrata in fig. 1. Poiché, però, si ricercano i valori tali che si abbia $\sin x < \frac{1}{2}$, conviene considerare l'angolo $\frac{5}{6}\pi$ come angolo negativo.

Anche osservando la fig. 1, si capisce come questo si ottenga con la seguente espressione:

$$-\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7}{6}\pi$$

L'insieme delle soluzioni della (4) è allora il seguente:

$$S \equiv \left\{ -\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$



<u>**Disequazioni trigonometriche omogenee in sin*x* e cos*x***</u>

Così come accade per le equazioni trigonometriche, anche per la risoluzione di una disequazione trigonometrica omogenea di grado *n*, il primo passo da compiere è quello di dividere tutti i termini per $\cos^n x$. Se però il grado *n* è dispari, $\cos^n x$ potrebbe anche essere negativo e di questo se ne deve tenere conto. Se invece il grado *n* è pari, il $\cos^n x$ è sicuramente positivo.

Quanto appena detto ci fa capire come, la risoluzione delle disequazioni in oggetto, è diversa a seconda del fatto che il grado *n* sia dispari o pari.

<u>*Disequazioni trigonometriche omogenee di grado dispari*</u>

È l'esempio delle <u>**disequazioni omogenee di primo grado**</u>. In generale, le disequazioni trigonometriche omogenee di grado dispari si risolvono mettendo a sistema, prima, la disequazione data con $\cos^n x > 0$ e poi con $\cos^n x < 0$. In quest'ultimo caso, però, quando si divide per $\cos^n x < 0$ la disequazione data, ad essa deve essere anche cambiato il verso della diseguaglianza proprio perché si sta dividendo per una quantità negativa. Si risolveranno i due sistemi e poi si considererà l'unione dei due insiemi di soluzioni. Nel caso delle **disequazioni di primo grado** ($n = 1$), però, si può ricorrere ad un metodo semplificato che anzi di considerare la divisione, in questo caso, per $\cos x$, prevede invece di mettere a fattor comune proprio $\cos x$, anche se in realtà non si tratta di un fattore in comune. In questo modo andrà determinato il segno di un prodotto di funzioni trigonometriche tra cui una è proprio $\cos x$, l'altra sarà una funzione in $\tan x$.

<u>*Esempio*</u>

Si risolva la seguente disequazione omogenea di primo grado:

$$\sin x + \cos x > 0 \tag{5}$$

Mettendo a fattor comune $\cos x$ si ottiene:

$$\cos x \left(\frac{\sin x}{\cos x} + 1 \right) > 0$$

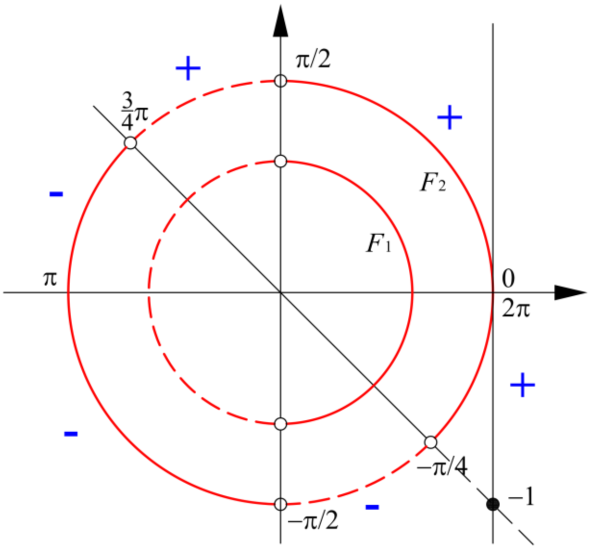
e per la seconda relazione fondamentale:

$$\cos x(\tan x+1)>0$$

Ci si è ricondotti, dunque, allo studio del segno di un prodotto di funzioni per cui si partirà dal porre maggiori di zero le funzioni che costituiscono i diversi fattori del prodotto:

$$F_1>0 \Rightarrow \cos x>0$$
$$F_2>0 \Rightarrow \tan x+1>0 \Rightarrow \tan x>-1$$

Si riporteranno i due intervalli ottenuti su due circonferenze concentriche che (anche se impossibile) si considereranno entrambi di raggio unitario; col tratto continuo si indicherà l'intervallo in cui il fattore è positivo, per complementarità, con la linea tratteggiata si indicheranno gli intervalli in cui tale fattore è negativo. Successivamente si considererà il prodotto dei segni per determinare il segno del prodotto tra funzioni (segni in blu in figura):



Poiché, dalla disequazione data, a noi serve che il prodotto di funzioni sia positivo, con riferimento alla figura, si avranno le seguenti soluzioni:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{3}{4}\pi+2k\pi$$

Anche in questo caso, così come avviene con le equazioni lineari omogenee, si può ricorrere alle formule parametriche, al metodo grafico o al metodo dell'angolo aggiunto, metodi già visti per le equazioni e che adatteremo alle disequazioni nei capitoli successivi.

Disequazioni trigonometriche omogenee di grado pari

Per la risoluzione di tali equazioni è sufficiente dividere tutti i termini per $\cos^n x$.

Esempio

$$\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x < 0$$

Dividendo per $\cos^2 x$ si ottiene:

$$\sqrt{3}\tan^2 x - 2\tan x - \sqrt{3} < 0$$

E ponendo $\tan x = t$ si ha:

$$\sqrt{3}t^2 - 2\,\mathrm{t} - \sqrt{3} < 0 \tag{6}$$

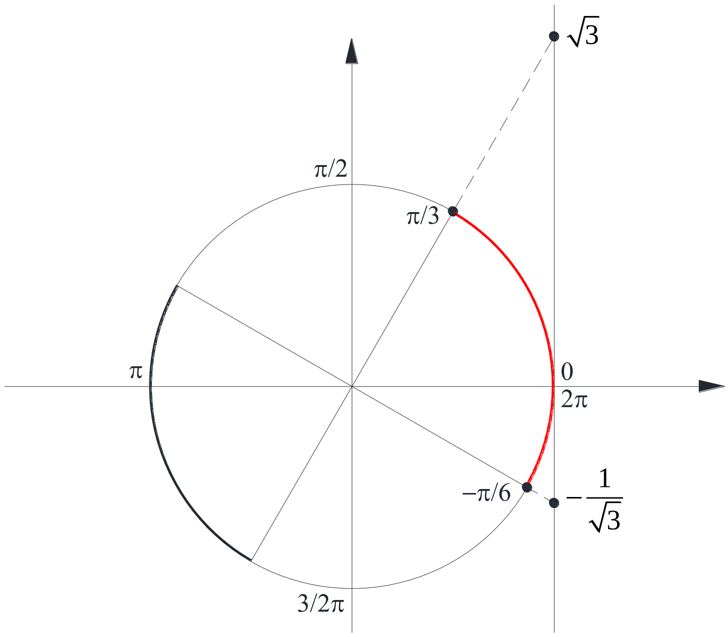
Risolvendo l'equazione di secondo grado associata, ovvero $\sqrt{3}t^2 - 2\,\mathrm{t} - \sqrt{3} = 0$, si ottiene: $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $t_2 = \sqrt{3}$ per cui la (6) ha le seguenti soluzioni:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \sqrt{3}$$

Ovvero:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < \tan x < \sqrt{3}$$

e dunque si ha la situazione della figura seguente:



L'insieme delle soluzioni dell'equazione data è dunque il seguente:

$$S \equiv \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{3}\pi + k\pi \right\}$$

Disequazioni trigonometriche lineari non omogenee in sin*x* e cos *x*

Sono equazioni trigonometriche del tipo:

$$a \sin x + b \cos x + c \lesseqgtr 0$$

dove *a*, *b* e *c* sono coefficienti numerici.

Come accade per le corrispondenti equazioni, tale tipo di disequazioni si risolve applicando le formule parametriche della trigonometria (**metodo grafico**) e dunque imponendo le seguenti posizioni:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \qquad t = \tan\frac{x}{2} \tag{7}$$

Le disequazioni date diverranno, in questo modo, disequazioni algebriche polinomiali di secondo grado le cui soluzioni saranno disequazioni elementari in $\tan\frac{x}{2}$.

Esempio

$$\sin x+\cos x\leq 1 \tag{8}$$

Applicando le (7) si ottiene:

$$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}-1\leq 0\Rightarrow -2t^2+2t\leq 0\Rightarrow t^2-t\geq 0$$

In definitiva, dunque, si ottiene la seguente equazione algebrica di secondo grado in t:

$$t^2-t\geq 0 \tag{9}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado associata si ha:

$$t^2-t=0\Rightarrow t(t-1)=0 \left\langle \begin{array}{l} t_1=0 \\ t_2=1 \end{array}\right.$$

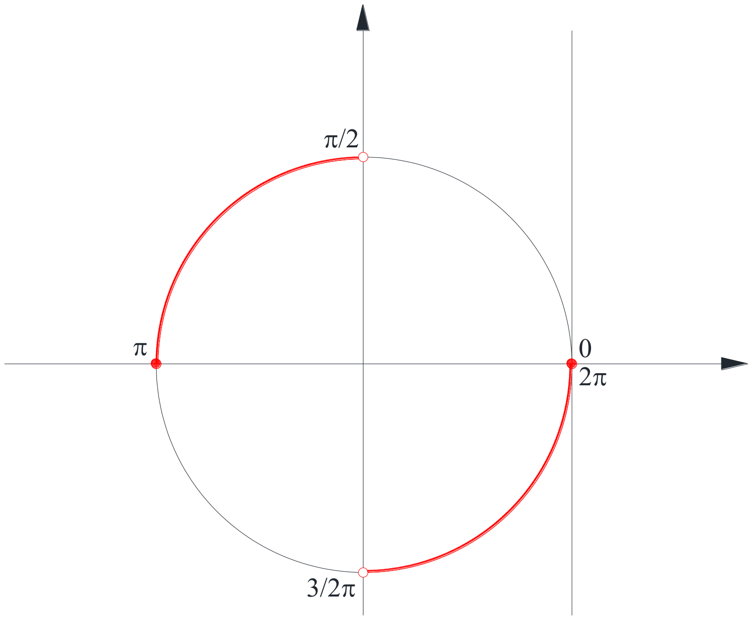
Le soluzioni della disequazione (9) sono dunque tali che:

$$t\leq 0\vee t\geq 1$$

Poiché è $t=\tan\frac{x}{2}$ si ha:

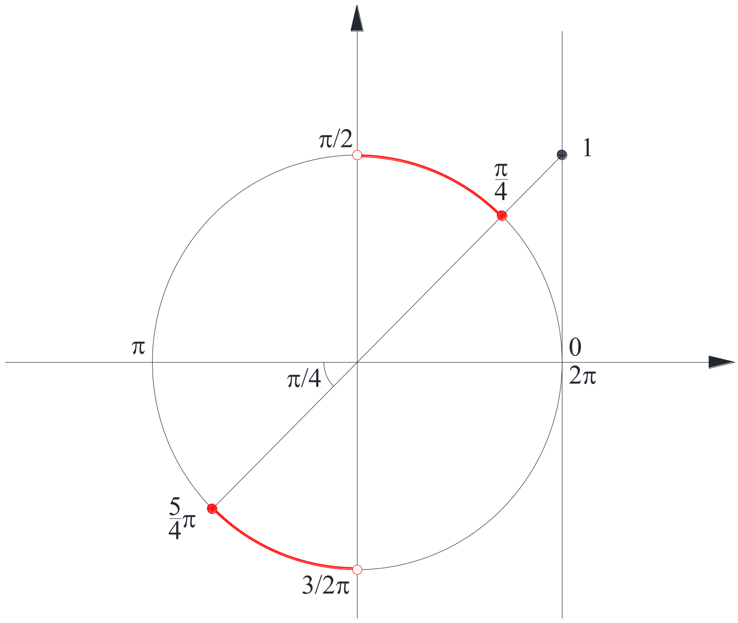
$$\tan\frac{x}{2}\leq 0\vee\tan\frac{x}{2}\geq 1$$

Considerando la disequazione $\tan\frac{x}{2}\leq 0$ si ha la situazione della figura seguente:



dove in rosso sono stati evidenziati gli intervalli degli archi che soddisfano la disequazione in questione. Si noti come i valori $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$ e $\frac{x}{2} = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow x = 3\pi \equiv \pi$ sono stati esclusi dall'intervallo delle soluzioni, visto che tali valori non sono accettati dalla funzione tangente.

Considerando, invece, la disequazione $\tan\frac{x}{2} \geq 1$ si ha la situazione della figura seguente:

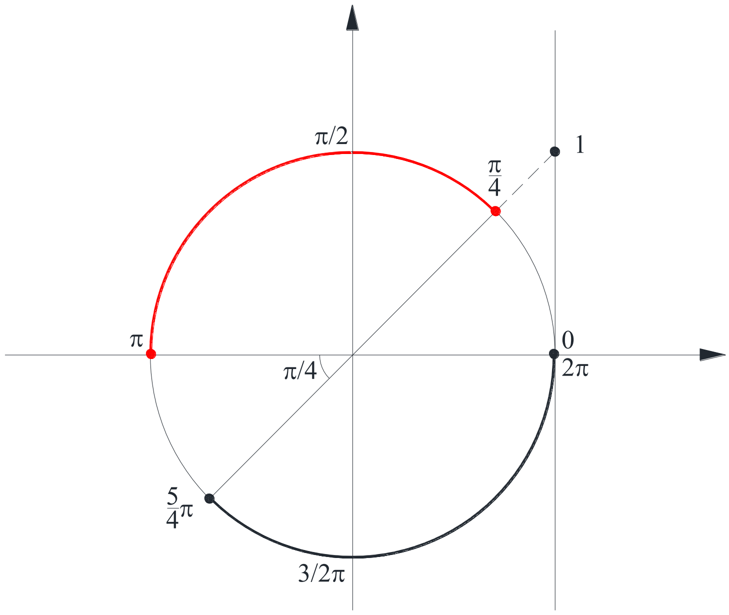


dove anche qui si sono evidenziati in rosso gli intervalli che soddisfano la disequazione in questione.

A questo punto, vale la pena, per quello che si è detto sopra, verificare se il valore $x=\pi$ soddisfa la disequazione data ovvero la (8):

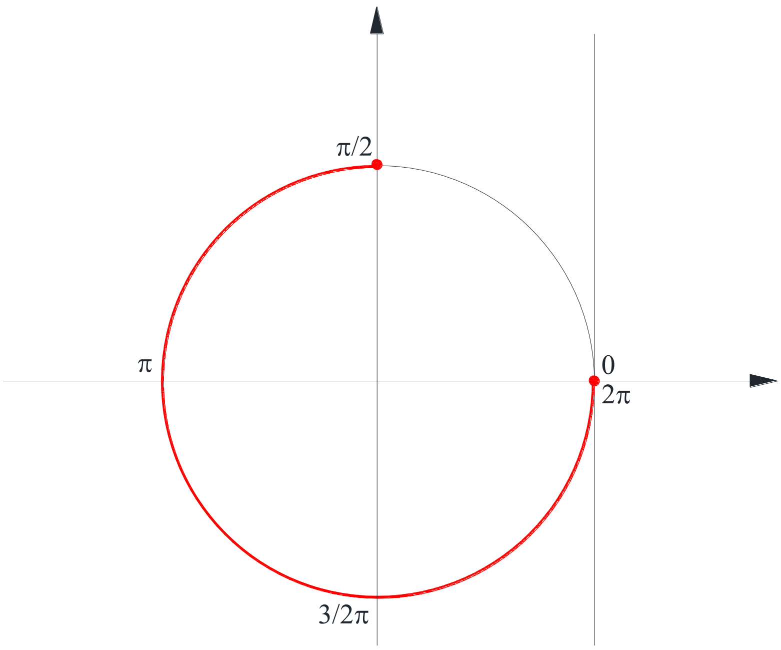
$$x=\pi \Rightarrow \sin\pi+\cos\pi=-1<0$$

La (8) è dunque soddisfatta per cui possiamo includere il valore $x=\pi$ tra le soluzioni. Complessivamente, dunque, sommando i due insiemi di soluzioni si avrà:



e quindi: $\frac{\pi}{4}+k\pi \le \frac{x}{2} \le \pi+k\pi$. L’insieme delle soluzioni della (8) è dunque il seguente:

$$S \equiv \left\{ \frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le 2\pi+2k\pi \right\}$$



Metodo grafico per la risoluzione delle disequazioni trigonometriche lineari in sin*x* e cos *x*

Data una disequazione trigonometrica lineare, sia omogenea che non omogenea, il metodo proposto, consiste nel risolvere la relativa equazione associata col metodo dell'intersezione della circonferenza ampiamente descritto nel capitolo delle equazioni trigonometriche (vedi "Metodo grafico per la risoluzione delle equazioni trigonometriche lineari in sin*x* e cos*x*"). La disequazione sarà soddisfatta in uno dei due semipiani individuati dalla retta rappresentata dall'equazione trigonometrica associata. Per verificare qual è il semipiano basta verificare se un qualsiasi punto, appartenente ad uno dei semipiani, soddisfa o no la disequazione data. Se la verifica ha esito positivo, significa che il semipiano è quello giusto e dunque le soluzioni della disequazione data saranno i punti della circonferenza trigonometrica che appartengono al semipiano in questione. La scelta più semplice è quella di scegliere, come punto di verifica, quando possibile, l'origine del sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

Come esempio, si può risolvere, con tale metodo, la disequazione presa come esempio nel paragrafo precedente:

Esempio

$$\sin x + \cos x \leq 1$$

Essendo:

$$\cos x = X; \qquad \sin x = Y$$

la disequazione data diventa:

$$Y + X \leq 1 \tag{10}$$

Risolvendo a sistema con la circonferenza trigonometrica l'equazione associata a tale disequazione si ha:

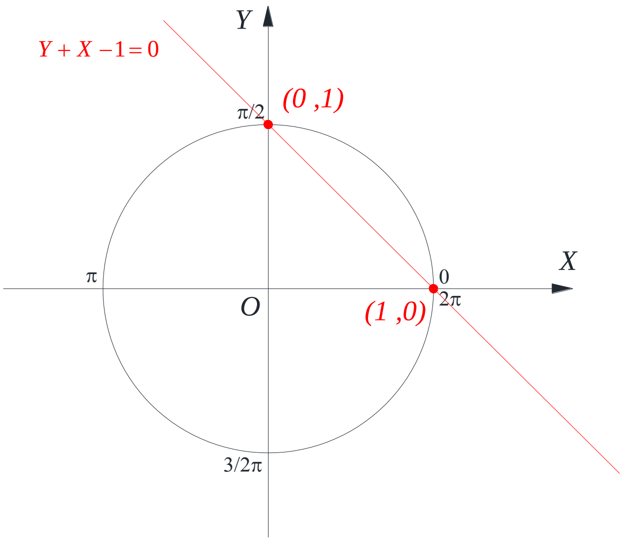
$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ X + Y = 1 \end{cases}; \begin{cases} X^2 + (1 - X)^2 = 1 \\ Y = 1 - X \end{cases}$$

Risolvendo la prima equazione del sistema si ottiene:

$$X^2 + (1 - X)^2 = 1 \Rightarrow X^2 \cancel{+1} - 2X + X^2 \cancel{-1} = 0 \Rightarrow 2X^2 - 2X \Rightarrow X^2 - X = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X(X - 1) = 0 \; \langle \begin{matrix} X_1 = 0 \\ X_2 = 1 \end{matrix}$$

e dunque, ritornando al sistema si ottengono due coppie di soluzioni:

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} X_2 = 1 \\ Y_2 = 0 \end{cases}$$



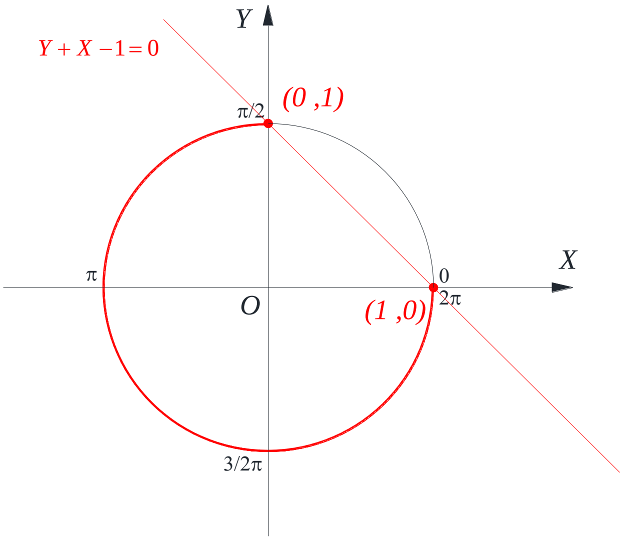
È chiaro, qui, come le soluzioni dell'equazione associata siano:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \qquad x_2 = 2k\pi$$

Se adesso nella (10) sostituiamo le coordinate dell'origine del sistema di riferimento ortogonale otteniamo:

$$0 < 1$$

che è una relazione vera. Allora, il semipiano delle soluzioni della disequazione data è quello sotto la retta per cui si ha la situazione della figura seguente:



Come ci si aspettava, dunque, l'insieme delle soluzioni della disequazione data è:

$$S \equiv \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi \right\}$$

<u>Metodo dell'angolo aggiunto per la risoluzione delle disequazioni trigonometriche lineari in sin*x* e cos *x*</u>

Come detto e dimostrato nel capitolo relativo alla risoluzione delle equazioni trigonometriche (vedi), il metodo dell'angolo aggiunto, trasforma una quantità del tipo $a\sin x + b\cos x$ nel modo seguente:

$$a\sin x + b\cos x = r\sin\left(x + \alpha\right) \tag{11}$$

dove:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ed α, detto **angolo aggiunto**, è tale che:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{se } a > 0$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \qquad \text{se } a < 0$$

Risolviamo, adesso, con tale metodo la disequazione lineare già risolta con gli altri metodi nei paragrafi precedenti:

Esempio

$$\sin x + \cos x \leq 1$$

Si ha:

$a = b = 1 \Rightarrow r = \sqrt{2}$

$\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

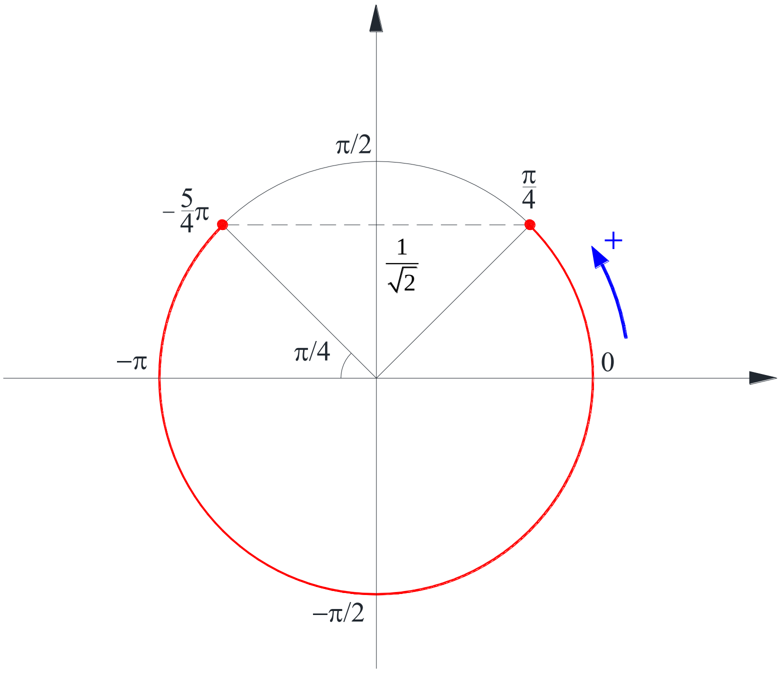
e dunque:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

La disequazione data diventa dunque:

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

per cui si ha la situazione della figura seguente:



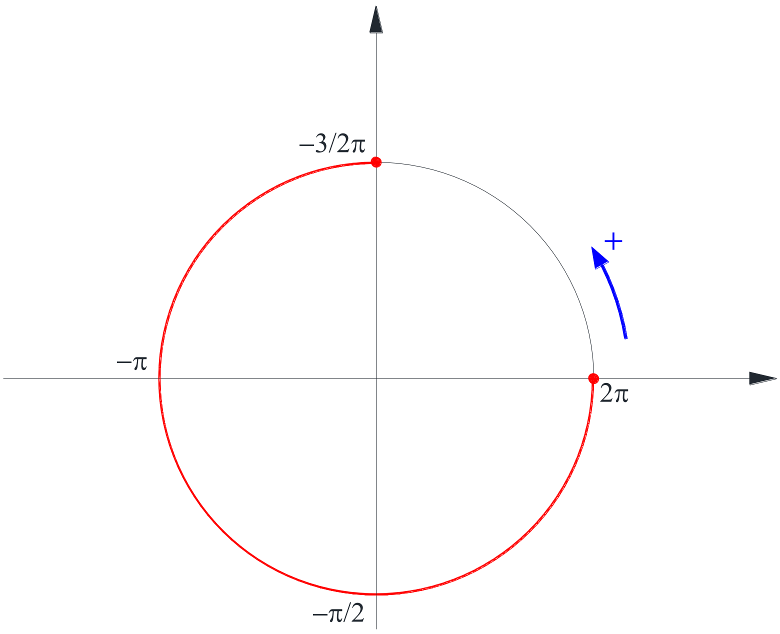
e dunque:

$$-\frac{5}{4}\pi+2k\pi\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

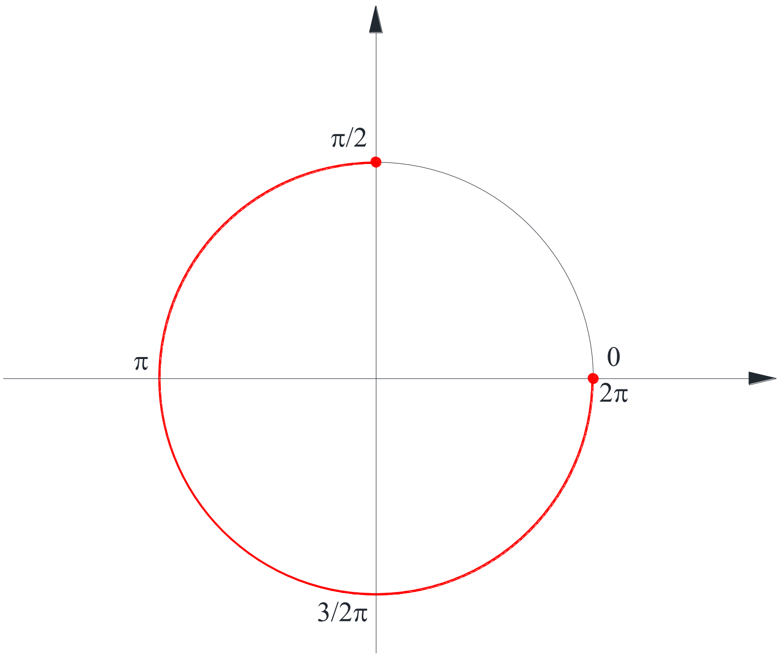
da cui:

$$-\frac{\pi}{4}-\frac{5}{4}\pi+2k\pi\leq x\leq-\cancel{\frac{\pi}{4}}+\cancel{\frac{\pi}{4}}+2k\pi\Rightarrow-\frac{3}{2}\pi+2k\pi\leq x\leq 2k\pi$$

per cui, per la *x* si ha la situazione della figura seguente:



che è del tutto equivalente a quella che segue:



per cui, in definitiva, si può considerare il seguente insieme di soluzioni aggiungendo una angolo giro agli estremi dell'intervallo delle soluzioni:

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq 2\pi+2k\pi$$

che è quello che ci aspettavamo.

<u>Disequazioni non omogenee di secondo grado in sin*x* e cos*x* che possono rendersi omogenee</u>

Sono tutte quelle disequazioni del tipo:

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x+d \lesseqgtr 0$$

Se si considera che per la prima relazione fondamentale della trigonometria si ha:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

il termine noto si può pensare scritto come:

$$d = d \cdot 1 = d\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

ed è proprio tramite questa posizione che la disequazione data che è non omogenea si può trasformare in un'equazione omogenea. Infatti, in questo modo, raccogliendo, la disequazione data diverrà:

$$(a+d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c+d)\cos^2 x \lesseqgtr 0$$

Che è una disequazione omogenea di secondo grado la cui risoluzione è stata già esaminata nei paragrafi precedenti.

<u>Studio del segno di prodotti e disequazioni fratte contenenti funzioni trigonometriche</u>

Per quanto riguarda lo studio del segno di un prodotto contenente funzioni trigonometriche, in realtà abbiamo già affrontato un esempio quando si è risolta la disequazione lineare omogenea (5) a pag. 7 dove si è trasformata la disequazione data nella seguente: $\cos x\left(\tan x + 1\right) > 0$ e dunque dove, in pratica, si deve studiare il segno di un prodotto tra funzioni.

La risoluzione di una disequazione fratta non è tanto diversa, la differenza sta nel fatto che, anzi di studiare separatamente il segno dei fattori, si studierà separatamente il segno di numeratore e denominatore. Sarà tutto più chiaro con un esempio:

<u>Esempio</u>

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{3}\tan x + 1} \le 0$$

Si studi separatamente il segno di numeratore e denominatore:

- $N\left(x\right) \ge 0 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x \ge 0$

Si tratta di una disequazione omogenea di secondo grado per cui si dividerà tutto per $\cos^2 x$. Si ottiene così:

$$1-\tan^2 x \geq 0 \Rightarrow \tan^2 x - 1 \leq 0$$

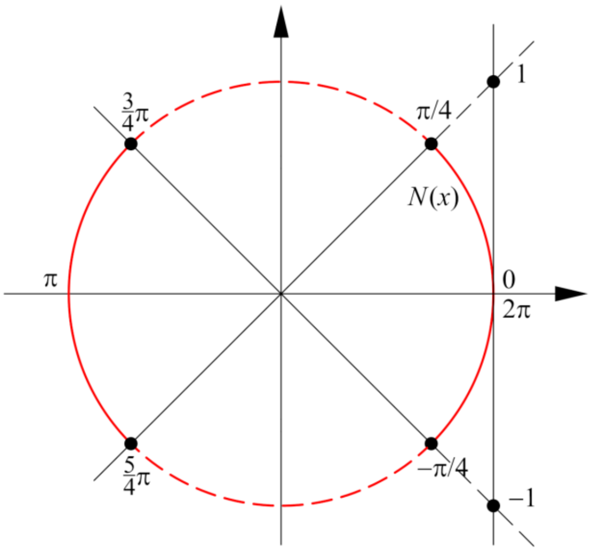
ovvero una disequazione di secondo grado in $\tan x$. Si risolva, dunque l'equazione di secondo grado associata:

$$\tan^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan x = \pm 1$$

La disequazione sarà vera per valori interni per cui si avrà:

$$-1 \leq \tan x \leq 1$$

e dunque la situazione della figura seguente:

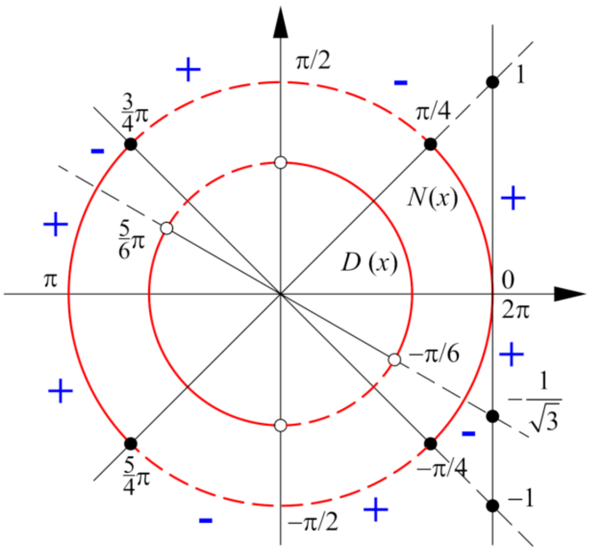


Dove, al solito, col tratto continuo si indicano gli intervalli in cui la funzione, nel nostro caso $\tan x$, è positiva e con la linea tratteggiata gli intervalli dove essa è negativa.

Studiamo, adesso il segno del denominatore. Si ha:

- $D(x) > 0 \Rightarrow \sqrt{3}\tan x + 1 > 0 \Rightarrow \tan x > -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Se sovrapponiamo il risultato dello studio del segno del denominatore a quello del numeratore otteniamo il digramma seguente:



dove in blu è stato riportato il risultato del prodotto dei segni di numeratore e denominatore che coincide, come sappiamo, col segno della frazione $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{3}\tan x + 1}$.

Vista la disequazione data, noi simo interessati al segno *meno* per cui dall'ultimo diagramma si evince il seguente insieme di soluzioni considerando anche che, i valori nel semipiano dei coseni negativi, sono supplementari a quelli nel semipiano dei coseni positivi, ovvero si differenziano di un angolo piatto, per cui si possono per esempio considerare le soluzioni negative del semipiano dei coseni positivi assumendo una periodicità id un angolo piatto:

$$S \equiv \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \le x < -\frac{\pi}{6} + k\pi \vee \frac{\pi}{4} + k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

Insieme equivalente di soluzioni è anche il seguente:

$$S' \equiv \left\{ \frac{3}{4}\pi + k\pi \le x < -\frac{5}{6}\pi + k\pi \vee \frac{5}{4}\pi + k\pi \le x < \frac{3}{2}\pi + k\pi \right\}$$

ma anche il seguente:

$$S'' \equiv \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \frac{3}{4}\pi + k\pi \le x < \frac{5}{6}\pi + k\pi \right\}$$

ed altri ancora se ne potrebbero trovare…

Sistemi di disequazioni trigonometriche

Si tratta di determinare, così come avviene nelle disequazioni ordinarie, le soluzioni in comune a due o tre disequazioni trigonometriche. Si consideri il seguente esempio:

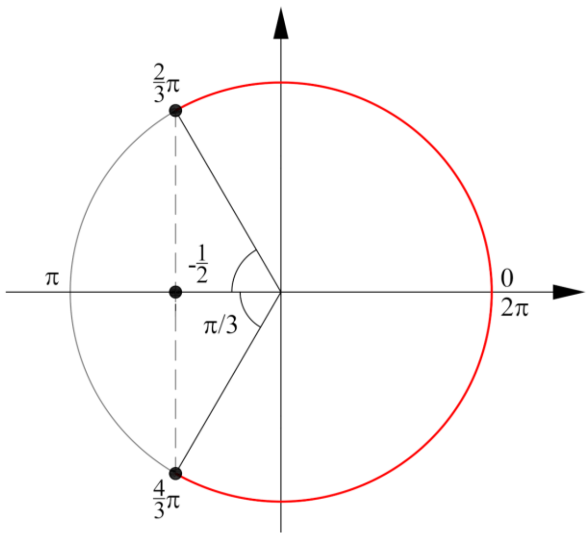
Esempio

$$\begin{cases} 2\cos x + 1 \ge 0 \\ 2\sin x - \sqrt{2} < 0 \end{cases}$$

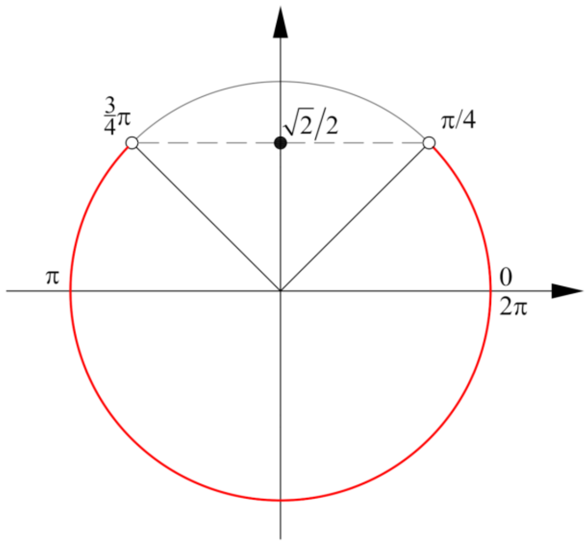
Risolvendo le disequazioni del sistema si ha:

$$\begin{cases} \cos x \ge -\dfrac{1}{2} \\ \sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

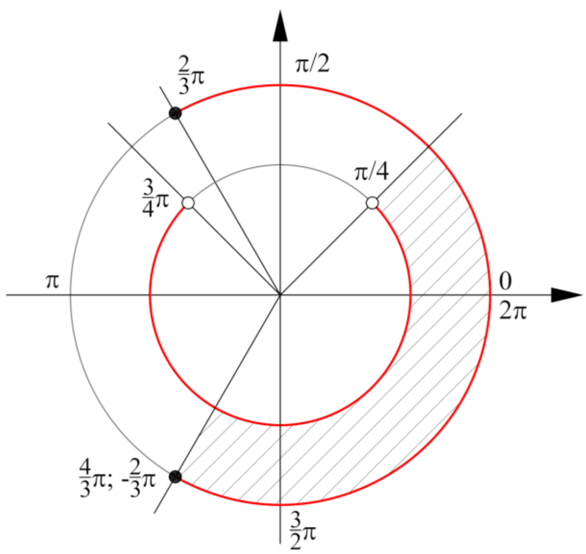
La risoluzione della prima disequazione può essere schematizzata con la figura seguente:



mentre la risoluzione della seconda con la figura seguente:



Sovrapponendo le due soluzioni si ha la situazione della figura seguente:



Questo diagramma ci consente di vedere dove i due insiemi di soluzioni esistono contemporaneamente e ciò succede dove i due tratti rossi coesistono assieme. Gli intervalli dove questo avviene sono stati evidenziati tramite il tratteggio. Si ha, dunque, il seguente insieme di soluzioni:

$$S \equiv \left\{ -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\}$$

che sono soluzioni per il sistema dato.