Dispense

FILIPPO LA IACONA

I SISTEMI DI MISURA DEGLI ANGOLI

Revisionato l' 8/6/2017

I SISTEMI DI MISURA DEGLI ANGOLI – INDICE

IL SISTEMA SESSAGESIMALE **3**

OPERAZIONI TRA GLI ANGOLI NEL SISTEMA SESSAGESIMALE 4

VALORI DEGLI ANGOLI NOTEVOLI NEL SISTEMA SESSAGESIMALE 9

IL SISTEMA SESSADECIMALE **10**

PASSAGGIO DAL SISTEMA SESSAGESIMALE AL SISTEMA SESSADECIMALE E VICEVERSA 10

IL SISTEMA RADIANTI **12**

VALORI DEGLI ANGOLI NOTEVOLI NEL SISTEMA RADIANTI 12

PASSAGGIO DAL SISTEMA RADIANTI AL SISTEMA SESSADECIMALE E VICEVERSA 13

I SISTEMI DI MISURA DEGLI ANGOLI

Il sistema sessagesimale

L'unità del sistema sessagesimale è il **grado sessagesimale**, si indica con ° e si definisce come la trecentosessantesima parte dell'angolo giro. In altre parole, si suddivide l'angolo giro in trecentosessanta parti e se ne considera una. Quella parte sarà il grado sessagesimale.

I sottomultipli del grado sessagesimale sono il **primo** e il **secondo**.

Il **primo** si definisce come la sessantesima parte del grado sessagesimale e si indica con **'**. un grado sessagesimale è dunque composto da sessanta primi (60').

Il **secondo** si definisce come la sessantesima parte del primo e si indica con **"**, di conseguenza un primo è formato da sessanta secondi (60") e un grado sessagesimale (più semplicemente detto grado) da 3600".

Di seguito si riporta il valore di un angolo espresso col sistema sessagesimale:

52° 23' 34"

e si leggerà: 52 gradi, 23 primi e trentaquattro secondi.

Si considerino, adesso, alcuni semplici esempi:

Si vuole determinare a quanti gradi corrispondono 300 primi (300'):

Per rispondere al quesito, poiché in un grado vi sono 60', basterà dividere per 60. Si ha:

$$300' = \frac{300'}{60'/1°} = \left(\frac{300}{60}\right)^{\circ} = 5°$$

Dunque 300' corrispondono a 5°.

A quanti primi corrispondono 7200"? E a quanti gradi?

Poiché in 1' vi sono 60" si ha:

$$7200'' = \left(\frac{7200}{60}\right)' = 120'$$

Una volta che si è fatto il calcolo per i primi si può rispondere al secondo quesito con la seguente operazione:

$$120' = \left(\frac{120}{60}\right)^{\circ} = 2°$$

Si poteva rispondere anche direttamente considerando che in un grado ci sono 3600". Si ha:

$$7200'' = \frac{7200''}{3600''/1°} = \left(\frac{7200}{3600}\right)^{\circ} = 2°$$

<u>Operazioni tra gli angoli nel sistema sessagesimale</u>

Nel **sommare** due angoli espressi col sistema sessagesimale si sommeranno a parte, prima i secondi, poi i primi ed infine i gradi. Nel fare questo, però, si deve fare attenzione ai ***riporti***, poiché ogni sessanta secondi si deve riportare un primo e ogni sessanta primi si dovrà riportare un grado. Si inizi con un esempio semplice che non prevede alcun riporto:

$$\begin{array}{rrrl} 27° & 12' & 32'' & + \\ 90° & 42' & 20'' & = \\ \hline 117° & 54' & 52'' & \end{array}$$

Poiché, dunque, nel sommare prima i secondi e poi i primi, in entrambi i casi non si supera 60, non vi sarà nessun riporto e dunque il risultato.

Si veda, adesso, il seguente esempio:

$$\begin{array}{rrrl} 54° & 32' & 123'' & + \\ 47° & 26' & 67'' & = \\ \hline 102° & 1' & 10'' & \end{array}$$

Fermo restando che, volendo, i due valori angolari potrebbero aggiustarsi poiché, come si può vedere, nella parte dei secondi si supera 60 per cui per il primo valore, facendo riferimento ai secondi si ha:

$$\begin{array}{r|l} 123 & 60 \\ \cline{2-2} 120 & \;2 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Il risultato della divisione ci dice che i 123" corrispondono a 2' col resto di 3" e cioè si ha:

$$123'' = 2' \quad 3''$$

Di conseguenza si ha:

$$54° \quad 32' \quad 123'' = 54° \quad 34' \quad 3''$$

Come si può vedere, i 2' sono stati aggiunti ai 32' già esistenti nella precedente scrittura. Si dirà che, in questo modo, il valore angolare è scritto in **forma normale**.

Per quanto riguarda il secondo valore angolare, con riferimento ai secondi, si vede subito che 67" corrispondono ad 1' e 7" per cui:

$$47° \quad 26' \quad 67'' = 47° \quad 27' \quad 7''$$

In questo modo la somma diverrà:

$$\begin{array}{rrrl} 1° & & & \\ 54° & 34' & 3'' & + \\ 47° & 27' & 7'' & = \\ \hline & \cancel{61'} & \cancel{10''} & \\ 102° & 1' & 10'' & \end{array}$$

Come si vede la somma tra i primi dà come risultato 61' che, è evidente, equivale a $1° \quad 1'$ per cui, come si vede il grado si riporta e si sommerà agli altri gradi.

Si poteva anche eseguire la somma direttamente. In questo caso, con riferimento ai secondi si ha:

$$\begin{array}{rl} 123'' & + \\ 67'' & = \\ \hline 190'' & \end{array}$$

Per verificare a quanti primi e secondi corrispondono 190" si svolgerà la seguente divisione:

$$
\begin{array}{r|l}
190 & \underline{\;60\;} \\
\underline{180} & 3' \\
10'' &
\end{array}
$$

Nella somma tra secondi si otterranno 10" e si riporteranno 3'.

La somma tra i primi sarà dunque la seguente:

$$
\begin{array}{rl}
3' & + \\
32' & + \\
26' & = \\
\hline
61' &
\end{array}
$$

e qui è evidente come si otterrà 1' dovendo riportare un grado.

In definitiva la somma tra i due valori andrà eseguita nel modo seguente:

$$
\begin{array}{rrrl}
1^\circ & 3' & & \\
54^\circ & 32' & 123'' & + \\
47^\circ & 26' & 67'' & = \\
\hline
 & & \cancel{190''} & \\
 & \cancel{61'} & \cancel{10''} & \\
102^\circ & 1' & 10'' &
\end{array}
$$

Anche nella **sottrazione** l'operazione andrà eseguita prima per i secondi, poi per i primi ed infine per i gradi. Quando però ci si trova a sottrarre un certo valore ad un valore più piccolo si deve ricorrere ai **prestiti** e dunque nella sottrazione tra secondi si ricorrerà al prestito di un primo che corrisponderà al prestito di sessanta secondi che andranno aggiunti e così via per la sottrazione tra i primi si ricorrerà al prestito di un grado che corrisponderà a sessanta primi. si consideri, dapprima, un esempio in cui non vi è bisogno di ricorrere a nessun prestito:

$$\begin{array}{rrrl} 117° & 57' & 32'' & - \\ 30° & 21' & 10'' & = \\ \hline 87° & 36' & 22'' & \end{array}$$

Si consideri, adesso, il seguente esempio:

$$\begin{array}{rrrl} 117° & 21' & 10'' & - \\ 30° & 57' & 32'' & = \\ \hline \end{array}$$

Si ha:

$$\begin{array}{rrrl} & 60' & & \\ 116° & 20' & 60'' & \\ \cancel{117°} & \cancel{21'} & 10'' & - \\ 30° & 57' & 32'' & = \\ \hline 86° & 23' & 38'' & \end{array}$$

Come si vede, dovendo iniziare dalla sottrazione:

$$\begin{array}{rl} 10'' & - \\ 32'' & = \\ \hline \end{array}$$

bisogna ricorrere al prestiti di un primo per cui i 21' diventano 20' ma il primo in prestito diventano 60" che vanno aggiunti ai 10" preesistenti.

Ci si trova, conseguentemente, ad eseguire la sottrazione:

$$\begin{array}{rl} 20' & - \\ 57' & = \\ \hline \end{array}$$

Si dovrà dunque ricorrere al prestito di un grado che diverranno 60' in aggiunta ai 20' già esistenti considerando anche quello che si era prestato ai secondi…..

Si considererà, adesso, la **moltiplicazione** tra un angolo ed un numero. Per esempio:

$$\begin{array}{rrrr} 32° & 4' & 7'' & \times \\ & & 3 & = \\ \hline \end{array}$$

Si procederà moltiplicando secondi, primi e gradi per il numero che ne nostro esempio è 3. Si ha:

$$\begin{array}{rrrr} 32° & 47' & 23'' & \times \\ & & 3 & = \\ \hline 96° & 141' & 69'' & \end{array}$$

Il valore dell'angolo così ottenuto andrà scritto in **forma normale** per cui, partendo dai secondi è subito chiaro come 69" corrispondano a $1' \quad 9''$ per cui per quanto riguarda i primi si avrà: $141' \rightarrow 141' + 1' = 142'$. Ma allora, per quanto riguarda i primi si avrà:

$$\begin{array}{r|l} 142 & 60 \\ \cline{2-2} 120 & 2° \\ \cline{1-1} 22' & \end{array}$$

Si ottengono dunque 22' e 2° da aggiungere ai 32 preesistenti.

Si avrà dunque:

$$\begin{array}{rrrr} 32° & 47' & 23'' & \times \\ & & 3 & = \\ \hline 96° & 141' & 69'' & \\ & \Downarrow & & \\ 98° & 22' & 9'' & \end{array}$$

Per spiegare il meccanismo della **divisione** si può dividere il valore appena ottenuto per 3 e verificare che quello che si ottiene è il valore di partenza. Si vuole perciò eseguire la seguente divisione:

$98° \quad 22' \quad 9'' \ : \ 3 =$

Questa volta, l'operazione verrà eseguita iniziando dai gradi. si ha:

$$
\begin{array}{lll|l}
\overset{\frown}{9}\overset{\frown}{8}^{\circ} & 22' & 9'' & 3 \\ \cline{4-4}
9 & & & 32^{\circ} \\ \cline{1-1}
/8 & & & \\
\;6 & & & \\ \cline{1-2}
\;2^{\circ} & & &
\end{array}
$$

Per iniziare, dunque, non si esegue altro che una divisione tra i gradi e il numero che è dato come divisore. Nel nostro caso si ottiene un quoziente di 32° e un resto di 2°. Il resto andrà trasformato in primi ed aggiunto ai 22' preesistenti per poi dividere i primi così ottenuti per 3 per ottenere il quoziente dei primi. Lo stesso procedimento si seguirà poi con i secondi:

$$
\begin{array}{lll|l}
\overset{\frown}{9}\overset{\frown}{8}^{\circ} & 22' & 9'' & 3 \\ \cline{4-4}
9 & & & 32^{\circ}\ 47'\ 23'' \\ \cline{1-1}
/8 & & & \\
\;6 & & & \\ \cline{1-1}
2^{\circ}\times 60 = & 120' & & \\ \cline{2-2}
 & \overset{\frown}{14}\overset{\frown}{2} & & \\
 & 12 & & \\ \cline{2-2}
 & \;22 & & \\
 & \;21 & & \\ \cline{2-2}
 & 1'\times 60 = & 60'' & \\ \cline{3-3}
 & & 69'' & \\
 & & 69'' & \\ \cline{3-3}
 & & // &
\end{array}
$$

Valori degli angoli notevoli nel sistema sessagesimale

Per come è stato definito il grado sessagesimale, è chiaro come l'angolo giro, espresso in gradi sessagesimali, sia pari a 360°. Allora, poiché l'angolo piatto è la metà dell'angolo giro esso avrà un'ampiezza di 180°. L'angolo retto, essendo la metà dell'angolo piatto avrà un'ampiezza di 90°.

Altri angoli importanti sono quello di 30° (un terzo di angolo retto), 45° (metà angolo retto), 60° (due terzi di angolo retto) e 270° (tre angoli retti).

Riassumendo si ha:

30°	$\frac{1}{3}$ di angolo retto
45°	metà angolo retto;
60°	$\frac{2}{3}$ di angolo retto
90°	**angolo retto**
180°	**angolo piatto**
270°	tre angoli retti
360°	**angolo giro**

Il sistema sessadecimale

L'unica differenza col sistema sessagesimale è che i sottomultipli non vengono espressi in primi e secondo bensì come frazione decimale. In questo modo, gli angoli, vengono espressi come numeri qualsiasi. Un esempio di angolo espresso mediante il sistema sessadecimale può essere il seguente:

52°,39278

Passaggio dal sistema sessagesimale al sistema sessadecimale e viceversa

Si riconsideri il valore angolare che si è preso come esempio all'apertura del paragrafo:

$$52°,39278$$

È chiaro come si abbiano 52°, la parte decimale, dunque, non rappresenta altro che i gradi e i secondi espressi come gradi. Poiché in un grado vi sono 60', moltiplicando per 60 la parte decimale si otterranno i primi. si avrà:

$$0°,39278 \times 60'/1° = 0.39278 \times 60 = 23',56680$$

I primi saranno dunque 23, mentre la parte decimale rappresenta i secondi. Poiché in un primo vi sono 60" si avrà:

$$0',56680 \times 60''/1' = 0.56680 \times 60 = 34'',0080$$

In definitiva, perciò, la conversione da sessadecimale a sessagesimale dà il seguente risultato:

$$52°,39278 \rightarrow 52° \quad 23' \quad 34''$$

Viceversa, si converta in sessadecinmale il seguente valore sessagesimale:

$$27° \quad 34' \quad 52''$$

Per la conversione, dunque, bisogna convertire in gradi i primi e i secondi che andranno sommati ai 27°.

Per quanto riguarda i secondi, poiché in un grado vi sono 3600" si ha:

$$52'' = \frac{52''}{3600''/1°} = \left(\frac{52}{3600}\right)^{\circ} = 0°,01444$$

Analogamente, per quanto riguarda i primi si avrà:

$$34' = \left(\frac{34}{60}\right)^{\circ} = 0°,56667$$

In definitiva si ha perciò:

$$27° \quad 34' \quad 52'' = 27° + 0°,56667 + 0°,01444 = 27°,58111$$

Il risultato della conversione è dunque il seguente:

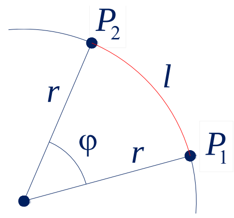
$$27° \quad 34' \quad 52'' \rightarrow 27°,581$$

Si noti come i valori espressi in sessadecimale vengono approssimati alla quinta o alla terza cifra decimale.

Il sistema radianti

Il radiante [rad] è l'unità di misura degli angoli nel Sistema Internazionale.

La misura in radianti di un angolo φ è definita come il rapporto fra la lunghezza l dell'arco di circonferenza sotteso a tale angolo e il raggio r di tale circonferenza:



$$\alpha[\text{rad}] = \frac{l}{r}$$

Poiché si tratta del rapporto fra grandezze omogenee (dello stesso tipo), il radiante sarà un numero puro, ovvero senza dimensioni.

Si noti come, un angolo avrà una misura di 1rad quando sottende un arco di circonferenza che ha una lunghezza l pari a quella del raggio r della medesima circonferenza..

Valori degli angoli notevoli nel sistema radianti

È noto come se, tagliassimo la circonferenza e la estendessimo, otterremo un segmento di lunghezza $2\pi r$. L'estensione della circonferenza è dunque:

$$C = 2\pi r$$

Si ricordi come, il numero π (pi greco) abbia il seguente valore:

$$\pi = 3.141592654$$

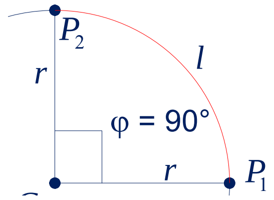
che di solito si approssima alla seconda cifra decimale ($\pi = 3.14$).

È chiaro come l'angolo sotteso all'intera circonferenza sia l'angolo giro. Applicando la definizione di radiante all'intera circonferenza, dunque, otterremo la misura in radianti dell'angolo giro (a. g.). Si ha così:

$$\text{a. g.} = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi$$

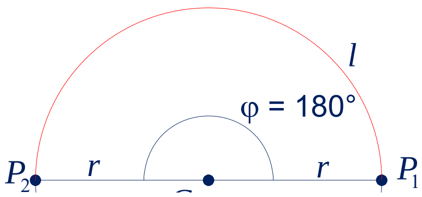
L'angolo giro in radianti, dunque, si può esprimere in funzione di π e sarà pari a 2π.

In questo modo, è possibile esprimere qualsiasi angolo espresso in radianti in funzione di π, infatti si consideri che:



A un quarto di circonferenza è sotteso un angolo di 90°. Si avrà dunque:

$$90° = \frac{1}{\cancel{4}2}\cancel{2}\pi = \frac{\pi}{2}$$



A metà circonferenza è sotteso un angolo di 180°:

$$180° = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi = \pi$$

Inoltre, considerando che 30° è 1/6 di un angolo piatto e che 45° e 60° sono rispettivamente la metà di un angolo retto ed 1/3 di un angolo piatto e che 270° sono tre angoli retti si può impostare la seguente tabella di corrispondenze:

$\varphi[\text{gradi}]$	0°	30°	45°	60°	**90°**	**180°**	270°	**360°**
$\varphi[\text{rad}]$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	**π**	$\frac{3}{2}\pi$	**2π**

<u>Passaggio dal sistema radianti al sistema sessadecimale e viceversa</u>

Per questi tipi di conversione si sfrutta il fatto che il rapporto tra un valore angolare in un sistema di misura e un valore con un angolo fisso (per esempio quello piatto) espresso nello stesso sistema di misura si mantiene costante nei diversi sistemi di misura. Se dunque $\alpha[\text{rad}]$ è il valore dell'angolo espresso in radianti e $\alpha[°]$ il valore dello stesso angolo espresso in gradi si avrà:

$$\frac{\alpha[\text{rad}]}{\pi} = \frac{\alpha[°]}{180}$$

Qui, nei due sistemi di misura, si sono rapportati i valori angolari con l'ampiezza dell'angolo piatto espressa nel relativo sistema di misura. Come detto i due rapporti devono essere uguali.

Per passare da un sistema all'altro, dunque, basterà risolvere la seguente proporzione:

$$\alpha[\text{rad}] : \pi = \alpha[°] : 180°$$

Si determini, ad esempio, il valore dell'angolo $\frac{\pi}{6}$, espresso dunque in radianti, nelò sistema sessadecimale.

Si deve risolvere la seguente proporzione:

$$\frac{\pi}{6} : \pi = \alpha[°] : 180°$$

Risolvendo tale proporzione si ottiene:

$$\alpha[°] = \frac{\frac{\cancel{\pi}}{6} \cdot 180°}{\cancel{\pi}} = \frac{180°}{6} = 30°$$

Come del resto ci si aspettava.

Si esprima adesso, in radianti, l'angolo di 30°.

Si deve risolvere la seguente proporzione:

$$30° : 180° = \alpha[\text{rad}] : \pi$$

dalla quale si ottiene:

$$30° : 180° = \alpha[\text{rad}] : \pi\alpha[\text{rad}] = \frac{3\cancel{0°} \cdot \pi}{18\cancel{0°}} = \frac{\pi}{6}$$

Come del resto ci si aspettava.